



INSTITUTO FEDERAL
RIO DE JANEIRO



CONCURSO PÚBLICO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO DE JANEIRO

EDITAL Nº 006/2022

PADRÃO DE RESPOSTAS DA PROVA DISCURSIVA REALIZADA DOMINGO, 15 DE MAIO DE 2022.

PADRÃO DE RESPOSTAS OFICIAL

EPF – 03

MATEMÁTICA

Nº DA QUESTÃO	Espera-se que o candidato(a) desenvolva os aspectos/conteúdos propostos a seguir.
1	<p>O candidato deverá desenvolver o(s) conteúdo(s) com base nos seguintes aspectos:</p> <ul style="list-style-type: none">A) Pela apresentação da função custo. (3 pontos)B) Pelo desenvolvimento da primeira derivada da função. (3 pontos)C) Pela conclusão e apresentação do ponto mínimo. (2 pontos)D) Pelo valor do lado do hexágono. (1 ponto)E) Pelo valor da altura da caixa. (1 ponto) <p>Denotemos por L o lado do hexágono que compõe a tampa e o fundo e por h a altura da caixa (prisma hexagonal).</p>

Temos que o volume da caixa será dado por $V = \frac{3L^2\sqrt{3}}{2} \cdot h = 1$

$$h = \frac{2\sqrt{3}}{9L^2}$$

Temos que a área total é dada por:

$$A_T = 2 \cdot \frac{3L^2\sqrt{3}}{2} + 6 L h$$

Considerando $f(L)$ como o custo do material utilizado, temos:

$$f(L) = 20 \cdot 2 \cdot \frac{3L^2\sqrt{3}}{2} + 15 \cdot 6 \cdot L \cdot h$$

$$f(L) = \frac{120L^2\sqrt{3}}{2} + 15 \cdot 6 \cdot L \cdot h$$

$$f(L) = 60L^2\sqrt{3} + \frac{20\sqrt{3}}{L}$$

Assim:

$$f'(L) = 120 L\sqrt{3} - \frac{20\sqrt{3}}{L^2} = 0 \rightarrow L = \sqrt[3]{\frac{1}{6}}$$

Ainda,

$$f''(L) = 120\sqrt{3} + \frac{40\sqrt{3}}{L^3} \rightarrow f''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{6}}\right) = 360\sqrt{3} > 0.$$

Logo, em $L = \sqrt[3]{\frac{1}{6}}$ a função custo $f(L)$ possui um mínimo absoluto e com isso as dimensões procuradas são:

$$L = \sqrt[3]{\frac{1}{6}} \text{ e } h = \frac{2\sqrt{3}}{9\left(\sqrt[3]{\frac{1}{6}}\right)^2}$$

Total previsto de linhas para a resposta final do(a) candidato(a): **30 linhas**

O candidato deverá desenvolver o(s) conteúdo(s) com base nos seguintes aspectos:

- A) Definição e propriedades de transformações lineares **(4 pontos)**
- B) Conceito de Núcleo e Imagem de uma transformação **(4 pontos)**
- C) Transformações injetoras, sobrejetoras e bijetoras **(2 pontos)**

a) Inicialmente, precisa-se escrever um vetor $v = (x, y, z)$ como combinação linear de v_1, v_2 e v_3 , então tem-se que:
 $(x, y, z) = a(1, 1, 1) + b(0, 1, 0) + c(-1, 0, 1) \rightarrow (x, y, z) = (a - c, a + b, a + c)$

equacionando:
$$\begin{cases} a - c = x \text{ (I)} \\ a + b = y \text{ (II)} \\ a + c = z \text{ (III)} \end{cases}$$
 e fazendo-se (I) + (III) $\rightarrow a = \frac{x+z}{2}$.

Substituindo-se $a = \frac{x+z}{2}$ em (II) e (III) tem-se que:

$$b = y - \frac{x+z}{2} \rightarrow b = \frac{-x+2y-z}{2} \text{ e } c = z - \frac{x+z}{2} \rightarrow c = \frac{-x+z}{2}$$

Logo, $(x, y, z) = \left(\frac{x+z}{2}\right)(1, 1, 1) + \left(\frac{-x+2y-z}{2}\right)(0, 1, 0) + \left(\frac{-x+z}{2}\right)(-1, 0, 1)$

Como T é linear, aplicando T na igualdade, tem-se que:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= \left(\frac{x+z}{2}\right)T(1, 1, 1) + \left(\frac{-x+2y-z}{2}\right)T(0, 1, 0) + \left(\frac{-x+z}{2}\right)T(-1, 0, 1) \\ &\rightarrow T(x, y, z) = \left(\frac{x+z}{2}\right)(3, 3, 1) + \left(\frac{-x+2y-z}{2}\right)(3, 0, -1) + \left(\frac{-x+z}{2}\right)(-2, 1, 0) \\ &\rightarrow T(x, y, z) = \left(\frac{3x+3z-3x+6y-3z+2x-2z}{2}, \frac{3x+3z-x+z}{2}, \frac{x+z+x-2y+z}{2}\right) \\ &\rightarrow T(x, y, z) = (x+3y-z, x+2z, x-y+z) \end{aligned}$$

Portanto, uma fórmula para $T(x, y, z)$ é: $T(x, y, z) = (x+3y-z, x+2z, x-y+z)$

b) Sabe-se que $v \in \text{Nuc}(T) = \{v \in \mathbb{R}^3; T(v) = \vec{0}\}$ assim:

$$T(x, y, z) = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ x + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \text{ escrevendo a matriz do sistema homogêneo e escalonando-a, tem-se que:}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1, L_3 \rightarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -\frac{1}{3}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 4L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ y - z = 0 \\ -6z = 0 \end{cases} \rightarrow x = y = z = 0$$

Logo, $\text{Nuc}(T) = \vec{0}$, sua base é um conjunto vazio e $\text{Dim}(\text{Nuc}(T)) = 0$.

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, tem-se que:

$$\text{Dim } \mathbb{R}^3 = \text{Dim}(\text{Nuc}(T)) + \text{Dim}(\text{Im}(T)) \rightarrow 3 = 0 + \text{Dim}(\text{Im}(T)) \rightarrow \text{Dim}(\text{Im}(T)) = 3$$

Portanto, $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$ e uma base para a imagem de T pode ser a canônica $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$

c) Como $\text{Nuc}(T) = \vec{0}$ e $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$, tem-se que T é injetora e sobrejetora, ou seja, T é bijetora.

Total previsto de linhas para a resposta final do(a) candidato(a): **30 linhas**

O candidato deverá desenvolver o(s) conteúdo(s) com base nos seguintes aspectos:

- A) Interpretar geometricamente o problema proposto **(2 pontos)**
- B) Escrever $P(x)$ na forma fatorada **(2 pontos)**
- C) Analisar as possíveis raízes com os dados do problema **(2 pontos)**
- D) Apresentar as raízes de $P(x)$ que satisfazem a condição dada **(2 pontos)**
- E) Encontrar os coeficientes de $P(x)$ **(2 pontos)**

3

Pelos dados do problema temos que a maior raiz é o dobro da menor, logo podemos chamar as raízes de $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ e $x_3 = 2\alpha$.

$P(x)$ pode ser expresso por:

$$P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - 2\alpha)$$

$A, B, P(A)$ e $P(B)$ são números primos e um deles é 13 e ainda $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$.

Como um deles é 13, vamos supor $P(A) = 13$, logo:

$$P(A) = (A - \alpha)(A - \beta)(A - 2\alpha)$$

$$i) \quad \begin{cases} A - \alpha = 13 \\ A - \beta = 1 \rightarrow 13 + \alpha = 1 + 2\alpha \rightarrow \alpha = 12 \text{ e } 2\alpha = 24 \therefore A = 12 + 13 \rightarrow A = 25 (\text{falso}) \text{ não é primo.} \\ A - 2\alpha = 1 \end{cases}$$

$$ii) \quad \begin{cases} A - \alpha = 1 \\ A - \beta = 13 \rightarrow 1 + \alpha = 1 + 2\alpha \rightarrow \alpha = 0 \therefore A = 1 (\text{falso}) \text{ não é primo} \\ A - 2\alpha = 1 \end{cases}$$

$$iii) \quad \begin{cases} A - \alpha = 1 \\ A - \beta = 1 \rightarrow 1 + \alpha = 13 + 2\alpha \rightarrow \alpha = -12 \rightarrow A = -11 \text{ e } \beta = -12 (\text{falso}) \text{ as raízes são negativas} \\ A - 2\alpha = 13 \end{cases}$$

$$iv) \quad \text{Supondo } A = 13, \text{ vem: } P(13) = (13 - \alpha)(13 - \beta)(13 - 2\alpha)$$

Sabemos que $\alpha \neq 12$ vem:

$$\begin{cases} 13 - \alpha = 7 \\ 13 - \beta = 1 \rightarrow \beta = 12, \alpha = 6 \text{ e } 2\alpha = 12 \text{ são as raízes} \\ 13 - 2\alpha = 1 \end{cases}$$

$$v) \quad P(x) = (x - 12)^2(x - 6) \quad P(x) = x^3 - 30x^2 + 288x - 864$$

$$m = -30 \quad p = 288 \quad q = -864$$

Total previsto de linhas para a resposta final do(a) candidato(a): **30 trinta linhas**

