INSTITUTO FEDERAL
RIO DE JANEIRO

Selecon
Instituto Nacional de Seleções e Concursos

CONCURSO PÚBLICO
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO DE JANEIRO

EDITAL Nº 006/2022

PADRÃO DE RESPOSTAS DA PROVA DISCURSIVA REALIZADA DOMINGO, 15 DE MAIO DE 2022.

PADRÃO DE RESPOSTAS OFICIAL

DUC – 01

MATEMÁTICA
Matemática; Estatística

Nº DA QUESTÃO	Espera-se que o candidato(a) desenvolva os aspectos/conteúdos propostos a seguir.
1	a) Em um dado, não viciado, todas as faces possuem a mesma probabilidade de ficarem voltadas para cima. Como duas faces tem o mesmo número, a probabilidade de se obter esse número é o dobro das demais, deste modo os resultados não são equiprováveis entre si. **Critério de pontuação do item** i. Calcular corretamente o que se pede **(2,0 Pontos)** Total previsto de linhas para a resposta final do(a) candidato(a): **12 linhas** b) Katie tira no **primeiro lançamento** um número diferente de 1. Deste modo, são 5 os resultados possíveis para este lançamento: 2, 3, 4, 5 e 6. No entanto, se o resultado for 6 não haverá chance de êxito para Katie no segundo lançamento. Então, para que ela consiga ter êxito no segundo lançamento, são 4 casos favoráveis dentre os 5 possíveis para o primeiro lançamento. $P_1 = 4/5$

Tendo garantido que o número seis é um dos resultados do segundo lançamento (caso favorável) dentre os seis possíveis, temos que a probabilidade de Katie acertar o segundo lançamento, independentemente do primeiro, é:

$P_2 = 1/6$

A probabilidade desejada é dada por: 4/5 x 1/6 = 4/30 = 2/15

Critério de pontuação do item

i. Cálculo de P_1 (0,8 Pontos)

ii. Cálculo de P_2 (0,8 Pontos)

iii. Cálculo de Final (0,4 Pontos)

Total previsto de linhas para a resposta final do(a) candidato(a):**12 linhas**

c) O mais favorável ao jogador será aquele em que a banca tem a menor chance de vencer. Então, basta calcular a probabilidade de errar os dois lançamentos em cada caso.

OBJETIVO **2** E **5**

São cinco casos favoráveis à banca dentre os seis possíveis no primeiro lançamento. Os resultados 1, 3, 4 e 6 não alteram a chance de sair 5 no segundo lançamento, mas o resultado 5 no primeiro lançamento anula a possibilidade de acerto no segundo.

Então, desmembramos os casos favoráveis à banca no primeiro lançamento.

1º caso) 1/6 (para 5) → Neste a banca já ganhou!

2º caso) 4/6 (para 1, 3, 4 e 6). Para ganhar aqui é necessário que não saia 5 no segundo lançamento, deste modo, há 5 casos favoráveis à banca (todos com exceção do 5). Daí, temos 4/6 x 5/6 =20/36

A banca ganha nos dois casos, ou um ou outro. Então, a chance de a banca ganhar é
1/6 + 20/36 = 26/36.

OBJETIVO **2** E **3**

São cinco casos favoráveis à banca dentre os seis possíveis no primeiro lançamento. Os resultados 1, 5 e 6 não alteram a chance de sair 3 no segundo lançamento, mas os resultados 3 e 4 alteram. Vamos desmembrar o primeiro lançamento em três casos.

1º caso) 3/6 (para 1, 5 e 6). Com qualquer desses resultados a probabilidade de não sair 3 no segundo lançamento é 5/6. P_1 = 3/6 x 5/6 = 15/36

2º caso) 1/6 (para 3). Neste caso a banca já ganhou! P_2 = 1/6

3º caso) 1/6 (para 4). Neste caso, haverá duas faces com o número 3 no segundo lançamento. Daí, há 4 casos favoráveis à banca. 4/6
P_3 = 1/6 x 4/6 = 4/36

15/36 + 1/6 + 4/36 = 25/36

Como a chance da banca é inversa a de Paul, a melhor chance de ele ganhar ou de recuperar o dinheiro gasto ocorreu no objetivo 2 e 3, com uma probabilidade de 11/36. Essa é a probabilidade de Paul acertar pelo menos um resultado.

Critério de pontuação do item
i. Solução que apresenta o caminho correto **(1,5 Pontos)**
ii. Desenvolvimento correto até o fim **(1,5 Pontos)**
Total previsto de linhas para a resposta final do(a) candidato(a): **20 linhas**

d) As probabilidades envolvidas no objetivo 4 e 5 são idênticas àquelas do objetivo 2 e 3, pois são formados por faces não opostas.

A probabilidade de o apostador acertar os dois lançamentos é 1/36.

De acertar pelo menos um é de 11/36 (calculado no item anterior). Então a probabilidade de acertar somente um é 10/36 (11/36 – 1/36).

Então para cada 36 casos, em média, a banca estima ter 1 vencedor (dois acertos) e 10 apostadores com um acerto.

De cada 360 mil dólares apostados, a banca espera pagar 6 dólares a 10 mil jogadores e devolver a quantia de 1 dólar a 100 mil jogadores.

Então, estima-se pagar 160 mil dólares de premiação, lucrando 200 mil dólares.

Critério de pontuação do item
i. Solução que apresenta o caminho correto **(1,5 Pontos)**
ii. Desenvolvimento correto até o fim **(1,5 Pontos)**
Total previsto de linhas para a resposta final do(a) candidato(a): **20 linhas**

2

a) Sabe-se que $\cos 3x$ é limitada, logo:

$$-M \leq \cos 3x \leq M$$

multiplicando a desigualdade acima por e^{-3x} tem-se:

$$-Me^{-3x} \leq e^{-3x}cos3x \leq Me^{-3x}$$

tomando o $\lim_{x\to+\infty}$ em todos os membros da desigualdade acima obtêm-se:

$$-M\lim_{x\to+\infty} e^{-3x} \leq \lim_{x\to+\infty} e^{-3x}\cos 3x \leq M\lim_{x\to+\infty} e^{-3x} \Rightarrow$$

$$-M.0 \leq \lim_{x\to+\infty} e^{-3x}\cos 3x \leq M.0$$

onde pelo teorema do confronto (sanduíche) temos:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-3x}\cos 3x = 0$$

Critério de pontuação do item

i. Mostrar conhecimento a respeito da função cosseno **(1 ponto)**
ii. Manipular corretamente a desigualdade **(1 ponto)**
iii. Utilizar o teorema do confronto para calcular o limite **(1 ponto)**

Total previsto de linhas para a resposta final do(a) candidato(a): **12 linhas**

---

b) Os pontos críticos da função são os valores de x que satisfazem:

$$f'(x) = 0$$

assim, calculando $f'(x)$ tem-se:

$$f'(x) = -3e^{-3x}(\cos 3x + \sin 3x)$$

Dessa forma

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos 3x + \sin 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\sin 3x,\text{ como } x \in [-1,0]$$

temos $x = -\frac{\pi}{12}$.

como $f(-1) \leq f(-\frac{\pi}{12})$ e $f(-\frac{\pi}{12}) \geq f(0)$, $x = -\frac{\pi}{12}$ é onde ocorre o máximo de f

Critério de pontuação do item

i. Apontar o critério para pontos críticos **(1 ponto)**
ii. Calcular corretamente a derivada **(1 ponto)**
iii. Calcular corretamente a abcissa utilizando a derivada primeira **(1 ponto)**
iv. Verificar que o valor encontrado é realmente o máximo da função **(1 ponto)**

Total previsto de linhas para a resposta final do(a) candidato(a): **12 linhas**

c) Utilizando a integração fazendo:

$$u = e^{-3x}$$
$$u' = -3e^{-3x}$$
$$v' = \cos 3x$$
$$v = 1/3 \sin 3x$$

escreve-se:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} e^{-3x} \sin 3x + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x} \sin 3x \, dx}_{M}$$

usando novamente a integração por partes:

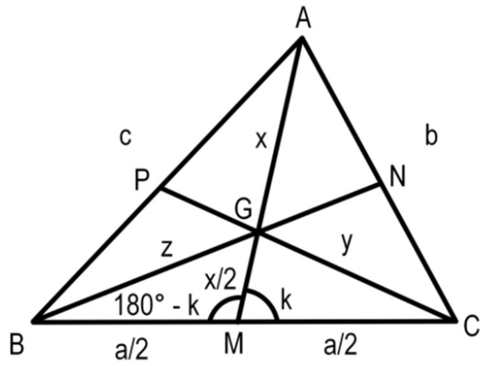
$$u = e^{-3x}$$
$$u' = -3e^{-3x}$$
$$v' = \sin \ 3x$$
$$v = -1/3 \cos 3x$$

escreve-se:

$$M = \frac{1}{3} e^{-3x} \cos 3x - \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x} \cos 3x \, dx$$

	Onde a substituição $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x} \cos 3x \, dx$ leva a: $$I = \frac{1}{6} e^{-3x}(\sin 3x - \cos 3x)$$ Aplicando o teorema fundamental do cálculo temos: $\frac{1}{6} e^{-3x}(\sin 3x - \cos 3x)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{6}(e^{-\frac{\pi}{2}} + 1)$ u.a. **Critério de pontuação** i. Toda técnica de integração por partes sem erro **(2 pontos)** ii. Aplicação correta do teorema fundamental do cálculo para encontrar a área **(1 ponto)** Total previsto de linhas para a resposta final do(a) candidato(a): **12 linhas**
3	a) O candidato deverá mostrar que o triângulo é acutângulo através da relação $a^2 < b^2 + c^2$, onde a é o maior lado do triângulo de lados a, b e c. $8^2 < 5^2 + 7^2$ $64 < 25 + 49$ $64 < 74$ O triângulo é acutângulo.

b) O candidato deve desenvolver a demonstração segundo os seguintes passos a seguir.



Como G é o baricentro, temos que M, N e P são pontos médios dos lados do triângulo. Se considerarmos o ângulo ABM com medida igual a K, então a medida de AMC deve ser 180° - k.

O baricentro divide a mediana na razão 2: 1, por esse motivo as medidas de GM, GN e GP devem ser, respectivamente, iguais a x/2, y/2 e z/2.

Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos ABM e BMC, obtemos as seguintes igualdades

$$i)\ c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 - 2.\frac{a}{2}.\frac{3x}{2}.\cos k$$

e

$$ii)\ b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 - 2.\frac{a}{2}.\frac{3x}{2}.\cos(180° - k)$$

Dado que cos(180°-k) = - cos k, ao somarmos i) e ii) encontramos $iii)\ b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{9x^2}{2}$. De modo análogo, obtemos também as igualdades

$iv)\ \ a^2 + c^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{9y^2}{2}$ e $v)\ \ a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{9z^2}{2}$

Somando as expressões iii), iv) e v) chegamos à expressão

$2a^2 + \ 2b^2 + 2c^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{9x^2}{2} + \frac{9y^2}{2} + \frac{9z^2}{2}$, onde concluímos que

$a^2 + b^2 + c^2 = 3. (x^2 + y^2 + z^2)$

(4, 0 pontos)

c) O candidato deve desenvolver a demonstração segundo os seguintes passos a seguir.

O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita no triângulo ABC. As distâncias de T aos pontos A, B e C são congruentes, haja vista que são os raios dessa circunferência. O ângulo BÂC mede 30^0, pois a soma dos outros dois ângulos internos desse triângulo medem 150°, segundo o enunciado.

Com isso o ângulo BTC tem medida igual a 60°, pois é ângulo central nessa circunferência. Concluímos, assim que o triângulo BTC é equilátero de lado igual a 10 cm. Logo, sua área S será calculada através de

$$S = \frac{10^2.\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$$